

Chapitre III - Résolution des systèmes linéaires - Méthodes directes

I) Introduction

Dans la pratique de l'A.N. on est souvent confronté à la résolution de systèmes linéaire $Ax = B$, A , matrice (m,n)
 x et b , matrices $(n,1)$

Ainsi la détermination de

- contraintes et déplacements dans une structure mécanique
- Débit et pression dans réseau hydraulique
- coefficient de régression des moindres carrés
- solution numérique d'équations différentielles partielles (méthode des différences finies, méthode des éléments finis) passe par la résolution d'un système linéaire ou non linéaire

Dans le dernier cas cité, le nombre d'équations peut être de plusieurs milliers

Remarque :

La résolution d'un système linéaire aisée

$$5x + 3y + 2z = 5$$

$$9x + 6y + 3z = 8$$

$$11x + y - z = 13$$

Relativement à celle d'un système non linéaire,

$$5x^4 + 3y^{1/2} + 2z^3 = 5$$

$$3x^5 + 6y + 7y^4 = 8$$

$$11x^3 + 6y^2 - z^2 = 13$$

Le problème de Cramer

Dans le chapitre, nous nous intéressons à la résolution d'un système à n équations et à n inconnues que l'on notera

$$\sum a_{ij} x_j = b_i$$

Méthodes directes

Elles conduisent à la solution en un nombre fini d'étapes

Rem1

Sans les erreurs d'arrondis, cette solution serait exactement celle du système

Rem2

Ces methodes sont recommandées (ou plus souvent utilisées par les matrices pleines ou de petite dimension)

Méthode itératives

A partir d'un estimé $x^{(k)}$, on calcule un estimé $x^{(k+1)}$ qui tend asymptotiquement vers la solution (si convergence)

⇒ généralement préféré pour les système de grande taille, (la matrice n'étant pas transformée au cours des calculs le problème d'accumulation des erreurs deviens moins crucial)

II) Système linéaire à matrice particulière

a) Matrice triangulaire inferieure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } j > i$$

$$\alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$A x = B \Rightarrow \sum a_{ij} x_j = b_i$$

$$\alpha \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\sum a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = b_i$$

$$\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad 0 \quad 0$$

$$x_i = 1/a_{ii} (b_i - \sum a_{ij} x_j)$$

$$\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad 0$$

b) Matrice triangulaire superieure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } j < i$$

$$0 \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha$$

$$A x = B \Rightarrow \sum a_{ij} x_j = b_i$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$\sum a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = b_i$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$x_i = 1/a_{ii} (b_i - \sum a_{ij} x_j)$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

c) Matrices diagonales

$$A x = B \Rightarrow x_i = b_i / a_{ii}$$

III) Matrice quelconque : Méthode de CRAMER

$$X = A^{-1} b$$

C'est la plus connue et la moins utilisée car la moins recommandable, en effet, l'évolution de $\lambda^{(-1)}$ et la multiplication par b nécessite $\cong n! + n^2e(n-1) + n^2$ opérations

Si $n=10$: 3.10^9 operations
Si $n=50$: 7.10^{67} operations

Inimaginable numériquement

IV) Méthode de Gauss

Théorème de Gauss

Etant donné une matrice carrée $A \forall, \exists []$ inversible $S/ SA=A^*$ ou $A^* [\backslash]$

1) Principe

Cette méthode consiste à triangulariser le système par étapes nécessaires

Le système reste inchangé si on le modifie par

- a) multiplication car division d'une ligne par un constante
- b) addition ou soustraction d'une ligne par une autre
- c) permutation de deux lignes

Cette méthode comporte n' étapes

Etapes 1

$$(A^{(0)}, b^{(0)}) \Rightarrow (A^{(1)}, b^{(1)})$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, \dots, a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} & a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, \dots, a_{1n}^{(0)} \\ b_1^{(0)} & & \\ a_{21}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, \dots, a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} & a_{21}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{2n}^{(1)} \\ b_2^{(1)} & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)}, a_{n2}^{(0)}, \dots, a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} & a_{n1}^{(1)}, a_{n2}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(1)} \\ b_n^{(1)} & & \end{array} \Leftrightarrow$$

de $i = 2$ à n (de la 2^o ligne à la dernière colonne)

$$L_i = L_i - k = i-1$$

$$A_{ij} = a_{ij} - a_{ik}/a_{kk} a_{nj}$$

Pour $k = 1$ à n

Pour $i = 1 + k$ à n

Pour $j = k$ à n

$$A_{ij}(1) = a_{ij}(0) - a_{ik}(0)/a_{kk}(0) a_{kj}(0)$$

```

      Fin j
      Bi(1) = bi (0) – aik/akk bi1
    Fin i
  Fin k

```

```

Pour k = 2 à n
  Pour i = k à n
    Pour j = k-1 à n
      Aij = aij – aik/akk . akj
    Fin j
    Bi = bi – aik/akk . bk
  Fin i
Fin k

```

A la (k+1)ieme etape on travaille sur les lignes k+1 à n pour la colonne k(ou k+1) à n

Ainsi en (n-1) étapes, on abouti au systeme $A^*x=b^*$

où A^* est une matrice triangulaire superieure de résolution de ce système

Remarque :

On a supposé à chaque itération que $(akk ; k-1) \neq 0$, le pivot n'est jamais nul !
Cependant il est possible qu'il s'annule au cours des opérations

Si $akk(k-1)=0$ on choisit comme élément pivot

$$A(lk \ k-1) = \max_i |a_{ik \ k-1}| \ (i \in [k,n])$$

On permute alors la ligne k avec la ligne l , seul procédé du pivot partiel (on n'oublie pas le 2nd membre)

Pivot total

$$a_{ln \ (k-1)} = \max_{i,j[k,n]} |a_{ij(k-1)}|$$

On permute alors la ligne l avec la ligne k et la colonne m avec la colonne k
Si malgré tout ceci on ne trouve pas de pivot nul , alors la matrice est singulière.

V) décomposition LU

Théorème 1

Si la triangularisation de Gauss n'amène aucun pivot nul, alors il existe une décomposition unique de A / $A=LU$ ou L matrice triangulaire inférieure (lower) et U matrice triangulaire supérieure (upper)

Théorème 2

Si A est à diagonale dominante, $\forall i, |a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$ alors il n'existe aucun pivot nul dans la décomposition de gauss et LU existe

La résolution de $Ax=b$ se fera en deux étapes

$$LUx = b$$

1° étapes

$$Ly = b$$

Système triangulaire inférieur $\Rightarrow y = ?$

2° Etape

$$Ux = y$$

Système triangulaire Supérieur $\Rightarrow x = ?$

Gauss :

$$Ax=b \Rightarrow A^*x=b^*$$

LU :

$$Ax=b \Rightarrow LUx=b$$

Cette méthode est intéressante quand on résout plusieurs fois un système dont seul le 2nd membre change

Expression de L et de U

On montre qu'il existe une matrice L qui permet de passer de l'étape k à l'étape k+1 de la triangulaire de Gauss

Ainsi

$$A_k = L_k A_{k-1}$$

Avec

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & & & & : \\ : & : & & : & & & & & & : \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l^{(k+1 \ k)} & & 1 & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l^{(k+2 \ k)} & & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l^{(k+3 \ k)} & & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ : & : & \dots & : & & : & : & : & & : \\ : & : & \dots & : & & : & : & : & & : \\ : & : & \dots & : & & : & : & : & & : \\ 0 & 0 & \dots & l^{(nk)} & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Où $l_{i,k} = a_{ik}/a_{kk}$ element pivot

Et

$$\begin{aligned} A(1) &= l_1 A^\circ \\ A(2) &= l_2 A(1) = l_2 l_1 A^\circ \\ &\vdots \\ A(n+1) &= l(n-1)l(n-2) \dots l_1 A^\circ \end{aligned}$$

D'où $A(n-1) = L \text{ Gauss } A^\circ$

Où

$$L \text{ Gauss} = l(n-1)l(n-2) \dots l_2 l_1$$

Est une matrice triangulaire inférieure régulière ($\det L = 1 \neq 0$) que l'on peut inverser
Posons $L = L^{-1} \text{ Gauss}$ et on obtient $A = LU$

Où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_{k1} & \vdots & \vdots & l(k+1, k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nk} & l(n, n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

et $U = ?$

$$A(n-1) = L_{\text{Gauss}} A^\circ$$

$$L^{(-1)} A(n-1) = L^{(-1)} L_{\text{Gauss}} A^\circ$$

$$L^{(-1)} A(n-1) = A^\circ$$

$$L A(n-1) = A^\circ$$

$L A(n-1) = A^\circ$ avec A° matrice initiale et $A(n-1)$ matrice modifiée après $n-1$ étapes de la triangularisation

Donc

$$A(n-1) = U$$

D'où

$$A = LU$$

V) Décomposition de CHOLESKI

Cette méthode est très employée lorsqu'elle est réelle, symétrique définie positive :

$A^t = A$ définie positive :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \\ x^t A x > 0 \\ \text{Si } x^t A x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, A peut être décomposé en $A = LL^t$

Détermination de L :

$$\begin{aligned} A &= LL^t \\ a_{ij} &= \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{tk} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{jk} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} l_{ik} &= 0 \text{ pour } k > i, \\ l_{jk} &= 0 \text{ pour } k > j \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} l_{jk} \\ i &= 1, n \\ j &= 1, n \end{aligned}$$

Pour la partie triangulaire supérieure de A , elle est symétrique la r ième ligne s'écrit

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r \wedge j} l_{rk} l_{jk} \quad j=r, n$$

Soit

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{jk} + l_{rn} l_{jr} \quad j=r, n$$

Soit l'algorithme qui permet de trouver la n ième ligne

Pour $r = 1, n$

$$L_{rr} = \left[a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2 \right]^{1/2}$$

Pour $j = i+1, n$

$$L_{jr} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{rk} l_{jk} / l_{rr}$$

fin j

Chapitre 4 - Résolution des systèmes linéaires - Méthode itératives

I) introduction

On veut résoudre le système linéaire de CRAMER

$$Ax = b \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A(n,n)$$

Les méthodes présentées sont la généralisation au cas n dimensionnels de méthode de résolution de $f(x) = 0$

Ces méthodes consistent à utiliser un estimé initial

$$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

De la solution exacte

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$$

II) Principe des substitutions successives

$Ax = b$ peut s'écrire en écrivant A sous la forme

$$A = M - N \quad (\text{régulières} \Rightarrow M^{-1} \exists)$$

$$Ax = b$$

$$(M-N)x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$x = (M^{-1})(Nx + b)$$

$$x = (M^{-1}N)x + (M^{-1})b$$

d'où à partir d'un estimé

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M^{-1} N x^0 + M^{-1} b \\ x^{(k+1)} &= T x^{(k)} + V \quad \text{où } k = 1, 2, \dots \\ T &= M^{-1} N \\ V &= M^{-1} b \end{aligned}$$

Question, Cette méthode converge t-elle ?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x^* ?$$

Posons $e(k) = x(k) - x^*$

Mais

$$\begin{aligned} x^* &= Tx^* + V \\ x(k+1) &= Tx(k) + V \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x(n+1) - x^* &= T(x(k) - x^*) + V - V \\ e(k+1) &= Te(k) \end{aligned}$$

Soit $e(1) = T e^0$

Le processus converge : oui

$$\forall e(1), \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k e^0 = 0, \forall e^0$$

Donc le processus converge

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$$

où 0 est la matrice nulle d'ordre n

Une condition nécessaire et suffisante de convergence est que le rayon spectral $\rho(T)$ de la matrice, $\rho(T) < 1$ (Car $\rho(T) = \max |\lambda_i|$ (λ_i ème valeur propre), $\rho(T) < \|T\|$)

D'où si $\|T\| < 1$ alors $\rho(T) < 1$

III) Décomposition de la matrice $A=M-N$

But : on veut choisir une matrice T convergente

$A=M-N$ / M régulière soit facilement inversible et vérifier $\rho(M^{-1}N) < 1$ où $\|M^{-1}N\| < 1$
Définissons les matrices suivantes

$$\begin{aligned} *D / d_{ii} &= a_{ii} \quad \forall i, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \\ *L / l_{ij} &= -a_{ij} \quad i > j \\ &= 0 \quad i < j \\ *U / u_{ij} &= -a_{ij} \quad j > i \\ &= 0 \quad i > j \end{aligned}$$

$$A = \begin{matrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{matrix} = \begin{matrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{matrix} - \begin{matrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & x & 0 \\ x & x & x & x & x \end{matrix} - \begin{matrix} 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A = D - L - U$$

IV) Types de décompositions

Jacobi

$$A = M - N$$

$$M = D$$

$$D = L + U$$

Gauss seidel

$$A = M - N$$

$$M = D - L$$

$$N = U$$

Relaxation

$$A = M - N$$

$$M = 1/\omega D - L$$

$$N = 1 - \omega/\omega D + U$$

$$\omega \in \mathbb{R}^{+*}$$

V) Méthode de Jacobi

$$A = M - N = D - (L + U)$$

$$Ax = b$$

$$Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[(L + U)x^{(k)} + b]$$

$$x_i^{(k+1)} = 1/a_{ii}(b_i - \sum_{j \neq i=1}^n a_{ij} x_j^{(k)})$$

Arrêt des itérations lorsque:

$$\text{Max } (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})/x_i^{(k)} < \varepsilon \sim 10^{-6}$$

Théorème

Une condition suffisante de convergence (Jacobi) est que A sont à diagonales fortement dominante /

$$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

VI) Méthode de Gauss seidel

$$A = M - N \text{ avec } M = D - L$$

$$N = U$$

$$T = (M^{-1}) N = (D - L)^{-1} U$$

D'où la methode itérative

$$(M - N) x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$(D-L) x(k+1) = Ux(k) + b$$

$$D x(k+1) = L x(k+1) + Ux(k) + b$$

$$X(k+1) = (D^{-1}) (Lx(k+1) + Ux(k) + b)$$

En developpant à partir de 1 le membre de gauche

$$\begin{aligned} (D-L) x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j(k+1) \\ &= a_{ii} x_i(k+1) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) \end{aligned}$$

Le membre de droite

$$Ux(k) + b = \sum_{j=i+1}^n -a_{ij} x_j(k) + b_i$$

d'où

$$x_i(b \neq 1) = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j(k+1)) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} x_j(k))]$$

Arret ? : identique à jacobi

Convergence ; Diagonale à forte dominante (comme Jacobi)

Remarque

Cette méthode utilise les i -èmes composante de $x(n+1)$ pour calculer le $(i+1)$ -ièmes composants de $x(n+1)$ pour calculer la i -ème composante. La convergence sera alors plus rapide que celle de Jacobi.

VII) Méthode de relaxation

Dans un procédé qui fait passer d'un vecteur entré $x(k)$ à l'estimé $x(k+1)$, si $x(k)$ et $x(k+1)$ n'ont qu'une composante différente d'un pas à l'autre, on dit que le procédé est une relaxation, sinon, c'est une itération

La méthode de Gauss seidel est un groupement de n relaxations

Principe :

$$x(k+1) = x(k) + \omega(x(k+1) - x(k))$$

Où $x(k+1)$ est le vecteur estimé de G. Seidel

Si $\omega=1 \Rightarrow$ G Seidel

Si $\omega>1 \Rightarrow$ sur relaxation

Si $\omega<1 \Rightarrow$ sous relaxation

G. Seidel

$$x_i(k+1) = 1/a_{ii} [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k)]$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \omega \left\{ \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k) \right] - x_i(k) \right\}$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \omega \left\{ \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k) \right] - a_{ii} x_i(k) \right\}$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

Notation matricielle

$$x_i(k+1) + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j = a_{ii} x_i(k) - \omega \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j(k)$$

$$= a_{ii} x_i(k) - \omega a_{ii} x_i(k) - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k) + \omega b_i$$

Soit

$$(D - \omega L) x(k+1) = [(1-\omega) D + \omega U] x(k)$$

Soit

$$(D/\omega - L) x(k+1) = [(1-\omega)/\omega D + U] x(k) + b$$

$$T = (D/\omega - L)^{-1} [(1-\omega)/\omega D + U]$$

$$V = (D/\omega - L)$$

Arret identique à Gauss Siedel ou Jacobi

Pour la matrice T d'itérations de la méthode de relaxation on obtient $\rho(T) < 1$ et la convergence assure pour $0 < \omega < 2$